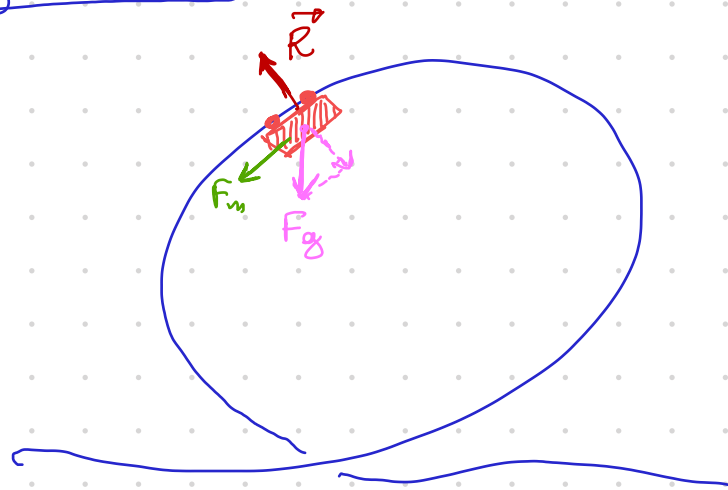


Problèmes avec la formulation Newtonienne

Bien que les trois lois de Newton soient suffisantes pour résoudre n'importe quel problème, on peut facilement penser à de situations où l'application des lois de Newton telles que formulées par Newton (en particulier la deuxième) ne soit pas bien adaptée.

Le montagnes russes



Le chariot est contraint à bouger sur le rail, mais il est soumis à la force du moteur $\vec{F}_m$ et à la force de gravité $\vec{F}_g$.

Bien évidemment,

$$\vec{F}_m + \vec{F}_g = m \vec{a}$$

impliquerait une accélération avec une composante orthogonale aux rails : le chariot tombe !

Il n'arrive pas car les rails exercent une force qui compense exactement la composante orthogonale aux rails, $\vec{R}$. Donc finalement

$$\vec{a} = \frac{1}{m} (\vec{F}_m + \vec{F}_g + \vec{R})$$

sera exactement tangent, localement, aux rails.

Le problème ici à appliquer $\vec{F} = m\vec{a}$ est que il faut calculer $\vec{R}$ à chaque instant de temps ! Pas du tout pratique !

Le formalisme de Lagrange vise justement à dépasser ce problème.

D'abord, il faut introduire le concepte mathématique de contrainte.

CONTRAINTE : une relation mathématique entre les positions des particules, leurs vitesses et le temps

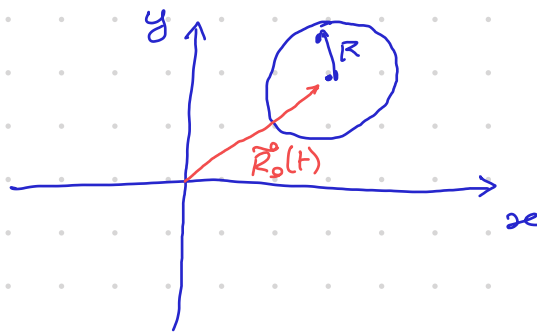
$$f(\underbrace{\{\vec{r}_i\}}_{\text{jeu des positions}}, \underbrace{\{\vec{v}_i\}}_{\text{jeu des vitesses}}, t) = 0$$

Dans ce cours on s'occupera seulement des contraintes dits "holonomes", où les vitesses n'apparaissent pas :

$$f(\{\vec{r}_i\}, t) = 0$$

Aussi, on regarde seulement des contraintes qui sont exprimées comme égalités, et pas comme inégalités.

Exemple 1 : particule en 2D qui bouge sur un cercle de rayon R , centré en $\vec{R}_0(t)$, qui change dans le temps



$$\vec{R}_0(t) = \begin{bmatrix} X_0(t) \\ Y_0(t) \end{bmatrix}$$

$$f(x, y, t) = 0 \implies (x - X_0(t))^2 + (y - Y_0(t))^2 - R^2 = 0$$

Exemple 2 : Plus compliqué. Deux particules en 3D dont une bouge sur un cylindre centré à l'origine, avec l'axe z comme axe, et de rayon R ; la deuxième particule n'a pas de contrainte en soi, mais la distance entre les deux particules est fixée à l

Contraintes (plusieurs) :

$$1) \quad x_1^2 + y_1^2 - R^2 = 0 \quad (\text{première particule})$$

$$2) \quad (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - l^2 = 0$$

Du deuxième exemple on voit tout de suite qu'on peut avoir plusieurs contraintes pour un système

$$\{ f_j(\{ \vec{r}_i \}, t) \}_{j=1}^k$$

Avant de continuer, il est bien de poser l'attention sur le nombre de degrés de liberté d'un système.

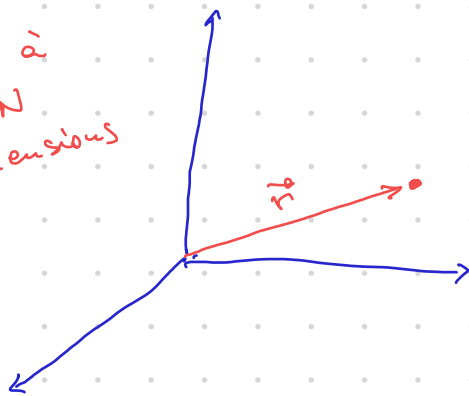
Un système de N particules en d -dimensions a dN degrés de liberté, correspondantes aux dN coordonnées. Chaque contrainte réduit le nombre de degré de liberté de 1.

Donc, k contraintes réduisent les degrés de liberté à $dN - k$.

Les contraintes peuvent être utilisés directement pour exprimer les $dN - k$ degrés de liberté par biais des "coordonnées généralisées" $\{q_j\}_{j=1}^{dN-k}$.

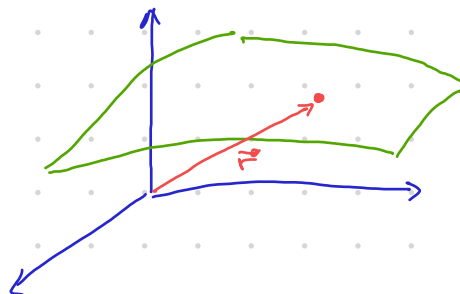
Pour mieux comprendre il est bien de regarder le système comme un point en dN dimensions

Espace à
 dN
dimensions

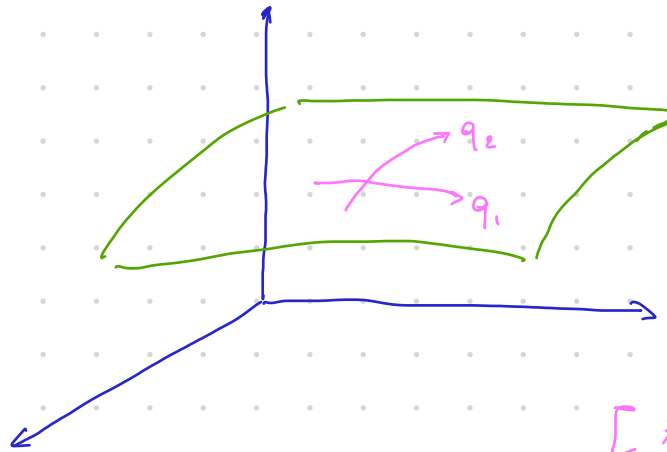


$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{dN} \end{pmatrix}$$

Une contrainte $f(\{\vec{r}\}, t) = 0$ est une surface (ou "hypersurface", "variété", etc) dans cette espace.



On peut paramétrer cette surface par biais d'un système de coordonnées



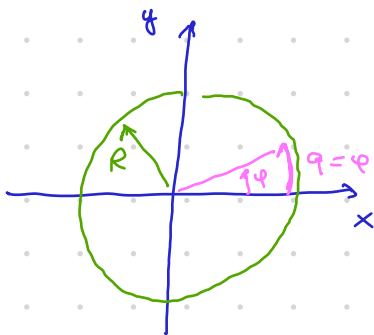
[Attention : q_1 et q_2
pour simplicité !
C'est un exemple !]

Avec la formule de la contrainte, ces coordonnées définissent de façon unique les points sur la surface.

Donc on peut exprimer

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(\{q_j\}, t)$$

On regarde un exemple :



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{mais}$$

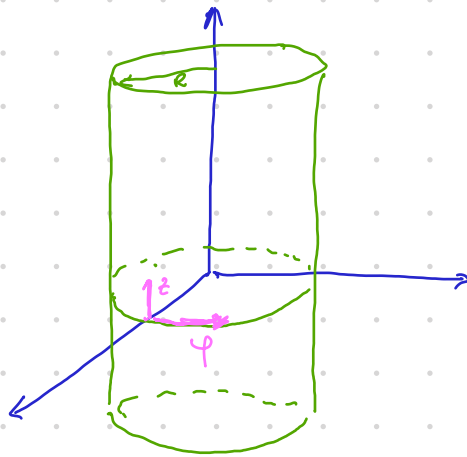
$$x = R \cos \varphi$$

$$y = R \sin \varphi \quad \text{et donc}$$

$$\vec{r} = \vec{r}(\varphi)$$

↙ φ est la coord.
généralisée

Plus compliqué



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{avec}$$

$$z \rightarrow z$$

$$x = R \cos \varphi$$

$$y = R \sin \varphi$$

$$\Rightarrow \vec{r} = \vec{r}(z, \varphi)$$

On voit ici que les coordonnées euclidiennes sont des longueurs, mais les coordonnées généralisées peuvent avoir des unités de mesure différentes.

Plus en générale : chaque contrainte définit une surface à $dN-1$ dimensions dans l'espace à dN dimensions. Le système doit satisfaire toutes les contraintes, et donc il évolue sur l'intersection de toutes les surfaces, qui est une surface à $dN-k$ dimensions (si on a k contraintes) dont la paramétrisation est donnée par $dN-k$ coordonnées généralisées $\{q_j\}_{j=1}^{dN-k}$.

Formalisme de Lagrange

Avec son ouvrage "Mécanique Analytique" (1788), le torinois Jean-Louis Lagrange a posé la fondation de toute la reformulation mathématique de la mécanique. Bien que son but était la mécanique des fluides, il est plus pédagogique de introduire son approche par biais des contraintes.

Comme dans le cas de la force de la contrainte pour un chariot sur les montagnes russes, en présence de k contraintes il faut k forces des contraintes, à calculer "on the fly".

Donc Lagrange se pose la question : peut-on se débarrasser des forces des contraintes ?

Intuitivement : si on pouvait se focaliser seulement sur le mouvement localement tangent à la surface définie par les contraintes (donc à $dN - k$ dimensions), on pourrait négliger toute les forces qui sont orthogonales.

Observation supplémentaire : les forces des contraintes

"ne travaillent pas", car elles sont toujours orthogonales au déplacement.

Donc la première chose à faire est de définir les déplacements possibles sur la surface des contraintes, qu'on appelle "déplacements virtuels" (ils sont virtuels car il ne sont pas nécessairement ceux que la trajectoire va suivre; ceux derniers sont un cas particulier).

Les déplacements virtuels sont $\{\delta \vec{r}_i\}_{i=1}^N$ (pour les N particules)

Le choix du jeu $\{\delta \vec{r}_i\}$ est arbitraire, pour autant qu'il satisfait les contraintes.

On écrit la deuxième loi :

$$\dot{\vec{p}}_i - \vec{F}_i - \vec{R}_i = 0 \quad \forall i$$

↑ force des contraintes sur la i -ème particule.

Maintenant on multiplie par $\delta \vec{r}_i$

$$(\dot{\vec{p}}_i - \vec{F}_i - \vec{R}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

et on remarque que, par construction, $\delta \vec{r}_i \cdot \vec{R}_i = 0$, et donc

$$(\dot{\vec{p}}_i - \vec{F}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Attention! Les déplacements virtuels mélangent les coordonnées!

On a dN déplacements virtuels, mais seulement $dN - k$ degrés de liberté.

Donc la première chose à faire est de "perdre" l'identité des particules et de sommer sur i

$$\sum_i (\dot{\vec{p}}_i - \vec{F}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Maintenant on va utiliser les coordonnées généralisées :

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(\{q_j\}, t)$$

donc

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^{dN-k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

ici on insiste sur la dérivée partielle car on pourrait avoir des dépendances pendant l'évolution du système. Avec la dérivée partielle il est clair qu'on fait attention à la géométrie.

Donc

$$\begin{aligned} \sum_i (\dot{\vec{p}}_i - \vec{F}_i) \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_i (\dot{\vec{p}}_i - \vec{F}_i) \cdot \left(\sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) = \\ &= \sum_{j=1}^{dN-k} \left\{ \sum_i (\dot{\vec{p}}_i - \vec{F}_i) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right\} \delta q_j = 0 \end{aligned}$$

L'astuce importante est que, là où les $\{\delta \vec{r}_i\}$ étaient liés l'un à l'autre, les $\{\delta q_j\}$ ne le sont pas car on peut les changer comme on veut : par construction ils sont une paramétrisation unique de la surface.

Il faut alors travailler un peu l'expression :

$$\sum_i (\dot{\vec{p}}_i - \vec{F}_i) \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

Première partie :

$$\begin{aligned} \sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} &= \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \\ &= \sum_i m_i \frac{d}{dt} \left(\vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) = \\ &= \sum_i m_i \frac{d}{dt} \left[\underbrace{\frac{d\vec{r}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}}_{\substack{\downarrow \\ \text{il faut voir qui} \\ \text{est celui}}} \right] - \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) \end{aligned}$$

↳ on échange les deux dérivées

On calcule la dérivée totale dans le temps de $\vec{r}_i$

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_e \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_e} \dot{q}_e + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

Maintenant on prend la dérivée partielle par rapport à $\dot{q}_j$:

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_e \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_e} \right) \dot{q}_e + \sum_e \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_e} \frac{\partial \dot{q}_e}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

Ici on voit l'utilité des contraintes holonomes : $\{\vec{r}_i\}$ dépendent seulement de $\{q_j\}$ et pas de $\{\dot{q}_j\}$ et donc

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

on reste alors avec

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_e \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_e} \underbrace{\frac{\partial \dot{q}_e}{\partial \dot{q}_j}}_{\delta_{je}} = \delta_{je} = \begin{cases} 1 & \text{si } j=e \\ 0 & \text{si } j \neq e \end{cases}$$

δ_{je} est la delta de Kronecker.

A rappeler : on est en train de prendre les dérivées partielles, donc on dérive les "lettres" et donc

$$\frac{\partial \dot{q}_e}{\partial \dot{q}_j} \neq 0 \quad \text{seulement si } \dot{q}_e \text{ et } \dot{q}_j \text{ sont la même expression}$$

Finalement

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

et on revient sur l'expression originale

$$\begin{aligned} \sum_i \vec{p}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} &= \sum_i m_i \frac{d}{dt} \left[\vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right] - \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \\ &= \sum_i \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \right) - \sum_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \end{aligned}$$

On s'occupe maintenant de la deuxième partie, avec les forces :

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = Q_j$$

Q_j est appelée force généralisée et, si on ne sait rien d'autre, elle reste de cette forme.

Enfin :

$$\sum_j \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - Q_j \right\} \delta q_j = 0$$

Cette expression est toujours $= 0$, car elle est une identité par construction.

Mais comme on a dit, $\{q_j\}$ sont arbitraires.
Donc leur combinaison linéaire est identiquement nulle
seulement si leurs coefficients sont identiquement nuls.

Donc

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad \forall j$$

Il s'agit de $dN - k$ équations différentielles.

On peut quand même avancer un peu plus si on considère le cas de forces conservatives

$$\vec{F}_i = - \vec{\nabla}_{\vec{r}_i} V$$

Dans ce cas

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_i \underbrace{\vec{\nabla}_{\vec{r}_i} V}_{\substack{\text{on applique la} \\ \text{règle de la} \\ \text{dérivée en chaîne}}} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

et donc l'équation devient

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0$$

on définit le Lagrangien du système

$$L = T - V$$

et on écrit

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

On peut avoir deux cas d'intérêt :

1) V ne dépend pas de $\dot{q}_j \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$

alors a peut soustraire

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0$$

et on a

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0}$$

Equations de Lagrange

(bien évidemment la connaissance des conditions initiales est toujours nécessaire !)

2) On aboutit aux équations de Lagrange aussi dans un autre cas : si

$$Q_j = - \frac{\partial V}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \right)$$

(le cas précédent en étant un cas particulier)

On reviendra sur ce cas plus loin dans le cours.

On s'arrête et on fait le point.

Le passage au formalisme de Lagrange est exécuté de la façon suivante :

- 1) on trouve une bonne paramétrisation de l'espace accessible au système : on passe des coordonnées cartésiennes $\{\vec{r}_i\}$ aux coordonnées généralisées $\{q_j\}$.

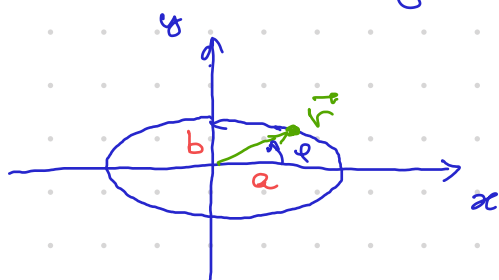
Ce passage permet de se débarrasser des contraintes (qui sont implicitement tenues en compte) et de conséquence on se débarrasse aussi des forces des contraintes.

- 2) Il faut écrire le Lagrangien du système : $L = T - V$ en fonction des coordonnées généralisées $\{q_j\}$
- 3) Il faut écrire l'équation de Lagrange associée à chaque q_j :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \forall j$$

+ conditions initiales $\{q_j(0)\}$, $\{\dot{q}_j(0)\}$

Exemple : particule de masse m en 2D, contrainte à bouger sur une ellipse avec axes principales dirigées selon x et y , de longueur a et b respectivement



contrainte :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

On passe aux coordonnées ellipsoïdales :

$$\begin{aligned} x &= a \cos \varphi \\ y &= b \sin \varphi \end{aligned} \Rightarrow \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{b^2 \sin^2 \varphi}{b^2} = 1$$

car elles satisfont la contrainte (si $a=b$ on obtient l'usuelle paramétrisation polaire), φ est la coordonnée généralisée!

En suite on écrit l'énergie cinétique T :

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2$$

mais

$$\dot{x} = -a \dot{\varphi} \sin \varphi$$

$$\dot{y} = b \dot{\varphi} \cos \varphi$$

donc

$$T = \frac{1}{2} m \left(a^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi + b^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi \right)$$

Aucun potentiel a été défini, donc $L = T$

Finalement on peut écrire l'équation de Lagrange pour φ :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$\Downarrow$

$$\frac{1}{2} m \frac{d}{dt} \left[2 \dot{\varphi} (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) \right] - \frac{1}{2} m \dot{\varphi}^2 [2a^2 - 2b^2] \sin \varphi \cos \varphi = 0$$

et après quelques calculs :

$$\dot{\varphi} (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) + \dot{\varphi}^2 (a^2 - b^2) \sin \varphi \cos \varphi = 0$$

$$\oplus \quad \underline{\varphi(0) \text{ et } \dot{\varphi}(0)} \quad \rightarrow \text{conditions initiales.}$$

Qu'est-ce que se passe si $a = b = R$?

$$L = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}^2$$

et l'équation de Lagrange devient

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \varphi}}_{=0} = 0$$

car φ n'apparaît pas dans L

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m R^2 \dot{\varphi} = l_z \quad \leftarrow \text{moment cinétique! en coordonnées polaires.}$$

$$\text{Donc} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \boxed{\dot{l}_z = 0}$$

Donc l_z est conservé !!!

Mathématiquement est évidente : si φ n'apparaît pas dans le Lagrangien L , alors

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

qui implique que $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = 0$

qui, à sa fois, implique que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{const} \quad \underline{\text{quantité conservée!}}$$

Une coordonnée qui n'apparaît pas dans le Lagrangien s'appelle coordonnée cyclique (bien évidemment la correspondante vitesse généralisée doit apparaître).

En définissant l'impulsion généralisée associée à une coordonnée généralisée q_j comme

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

on a que, pour chaque coordonnée cyclique, l'impulsion généralisée associée est conservée

$$\dot{p}_j = 0 \quad \Rightarrow \quad p_j = \text{constante}.$$

On donne un regard un peu plus profond au concept de coordonnée cyclique :

$$L = L(\underbrace{q_1, q_2, \dots, q_{j-1}, q_{j+1}, \dots, q_m}_{q_j \text{ cyclique}}, \underbrace{\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m}_{\text{toutes les vitesses}}, t)$$

Si on ajoute une valeur quelconque à q_j , mais constante dans le temps, L ne change pas! Il s'agit d'une symétrie "géométrique" du système.

Donc, encore une fois, on voit que l'existence de quantités conservées est intimement liée à la présence d'une symétrie.

Maintenant on se pose la question cruciale : est-ce que le formalisme de Lagrange s'applique seulement en présence d'un ou plusieurs contraintes ?

En effet, non. Si on veut, on peut l'appliquer aussi en absence de contraintes (toute la dérivation ne le demande pas!)

On peut donc regarder Lagrange d'une autre façon :

Le formalisme de Lagrange tout simplement nous fournit une méthode pour changer les variables dynamiques qu'on utilise pour décrire le système.

Les changements de variables de cartésiennes à polaire, cylindriques ou sphériques en sont des exemples.

Dans la même ligne de pensée, alors, on peut aussi appliquer Lagrange en coordonnées cartésiennes :

on regarde le cas d'une seule particule en 3D, soumise à un potentiel externe $V(\vec{r})$

$$L = \underbrace{\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}_T - V(x, y, z)$$

Et enfin

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (\underbrace{m \dot{x}}_{\downarrow}) + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

p_x = impulsion associée à x , définie par $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$.

Correspond à la définition usuelle.

et donc

$$\dot{p}_x = F_x$$

La deuxième loi !

On peut aussi montrer que

$$\dot{p}_y = F_y$$

$$\dot{p}_z = F_z$$

Donc, en coordonnées cartésiennes, les équations de Lagrange se réduisent à la deuxième loi. En effet le formalisme de Lagrange nous donne une forme de la deuxième loi plus universelle, qui est adaptée à n'importe quel changement de variable.

Il est aussi intéressant de remarquer que si une des coordonnées cartésiennes est cyclique, l'impulsion correspondante est conservée. Encore une fois, il s'agit d'une conservation associée à une symétrie.